K Körper $\qquad (V,+,\cdot)$ K-VR

V K-VR

Def: Eine <u>Familie von Vektoren</u> ist ein Element $(\underline{v}_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V$

<u>Länge</u> von $(\underline{v}_i)_{i\in I}$:= Anzahl der Elemente von I

Meist $I=\{1,\dots,n\}$: $\quad \underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n$

oder $I=\mathbb{N}$ $\quad \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \dots$

Def (2.4.5, 2.5.1)

Eine Familie von Vektoren $(\underline{v}_i)_{i\in I}$ ist

(a) ein <u>Erzeugendensystem</u> von V, falls $\operatorname{span}(\{\underline{v}_i \mid i\in I\}) = V$

(b) <u>linear unabhängig</u>, wenn sie sich nur trivial zu $\underline{0}$ kombinieren lässt, wenn also für jede Linearkombin.

$$\sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \overset{\in K}{\lambda_i}\, \underline{v}_i \quad \text{gilt:}$$

nur endlich viele $\lambda_i \neq 0$

$$\sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i \underline{v}_i = \underline{0} \implies \lambda_i = 0 \quad \forall i \in I$$

(andernfalls <u>linear abhängig</u>)

(c) eine <u>Basis</u>, falls sie linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

<u>Satz</u>: $(V, +, \cdot)$ K-VR

Eine Familie von Vektoren $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ ist

(a) genau dann ein Erzeugendensystem, wenn jeder Vektor $\underline{v} \in V$ **mindestens eine** Darstellung als Linearkombination der $\underline{v}_i$ hat:

$$\boxed{\exists \lambda_i \in K: \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i \underline{v}_i = \underline{v} \qquad \text{nur endlich viele } \lambda_i \neq 0}$$

(b) genau dann linear unabhängig, wenn jedes $\underline{v} \in V$ **höchstens eine** solche Darstellung besitzt

$$\boxed{\sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i \underline{v}_i = \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i' \underline{v}_i \implies \lambda_i = \lambda_i' \quad \forall i\in I}$$

(c) genau dann eine Basis von V, wenn jedes $\underline{v} \in V$ genau eine solche Darstellung besitzt.

Ergänzungslemma $\quad V$ VR

Sei $(\underline{v}_i)_{i\in I}$ linear unabhängig.

Für jedes $\boxed{\underline{v} \in V \setminus \operatorname{span}(\{\underline{v}_i\}_{i\in I})}$ ist auch die um $\underline{v}$ ergänzte Familie $(\underline{v}, \underline{v}_i)_{i\in I} \in V \times \prod_{i\in I} V$ linear unabhängig.

Satz: (Charakterisierung von Basen 2.5.2)

V VR

(a) Eine Basis ist ein **minimales Erzeugendensystem**:

$$(\underline{v}_i)_{i\in I} \text{ Basis} \iff \begin{cases} \operatorname{span}(\{\underline{v}_i\}_{i\in I}) = V, \text{ aber} \\ \operatorname{span}(\{\underline{v}_i\}_{i\in J}) \neq V \\ \quad \text{für } J \subsetneq I \end{cases}$$

(b) Eine Basis ist eine **maximale linear unabhängige Familie**:

$$(\underline{v}_i)_{i\in I} \text{ Basis} \iff \begin{cases} (\underline{v}_i)_{i\in I} \text{ linear unabhängig,} \\ \quad \text{aber} \\ (\underline{v}, \underline{v}_i)_{i\in I} \text{ linear abhängig} \\ \quad \forall \underline{v}\in V \end{cases}$$

Basisauswahl- und Ergänzungssatz

V VR (2.5.3 & 2.5.5)

$\mathcal{E} := (v_i)_{i \in E}$ Erzeugendensystem

$\mathcal{U} := (v_i)_{i \in U}$ linear unabhängig,

$U \subset E$

Dann können wir

Vektoren aus $\mathcal{E}$ auswählen, die $\mathcal{U}$ zu einer Basis ergänzen.

$\exists B: \quad U \subset B \subset E$

derart, dass $(v_i)_{i \in B}$ Basis von V ist.

Hauptsatz der linearen Algebra, Teil I: Jeder Vektorraum hat eine Basis.

(2.5.3)